8 практикалық сабақ
Функцияның туындысы

2.1 Элементар функцияның туындысы

$y = f(x)$ функциясы $(a, в)$ интервалында анықталған болсын. Осы интервалдан $x_0 + \Delta x$ нүктесі шықпайтындай етіп, x_0 аргументіне $\Delta x \neq 0$ өсімшесін берейік. Сонда $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі сәйкес өсімшесі

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

болады.

$y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі *туындысы* деп Δx нөлге ұмтылғанда функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының шегін айтады. Белгіленуі: $f'(x_0)$ немесе $y'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Егер $y = f(x)$ функциясының $(a, в)$ интервалдың әрбір x нүктесінде туындысы бар болса, онда ол туынды x аргументінің функциясы болып табылады және оны

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = y' = f'(x)$$

деп белгілейді.

Геометриялық тұрғыдан туынды x нүктесінде $y = f(x)$ функциясының графигіне жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін анықтайды, яғни $y' = tg\alpha$.

Механикалық тұрғыдан туынды x нүктесіндегі функцияның өзгеріс жылдамдығы**,** дәлірек айтқанда $S = f(t)$ функциясы материалдық нүктенің түзу бойымен қозғалыс заңдылығын өрнектейтін болсақ, t уақыт аралығындағы лездік жылдамдығы $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f'(t)$.

Функцияның туындысын табу *функцияны дифференциалдау* делінеді.

Д и ф ф е р е н ц и а л д а у д ы ң н е г і з г і е р е ж е л е р і:

Егер $c = const$ және $u = u(x), v = v(x)$ функцияларының x нүктесінде туындылары бар болса, онда

1) $c' = 0$, 2) $x' = 1$, 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$, 4) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$,

5) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

7) Егер $y = F(u)$ функциясының u нүктесінде және $u = u(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы бар болса, онда $y = F(u(x))$ күрделі функциясының x нүктесінде туынды бар және ол

$$\left[f(u(x))\right]' = f'(u) \cdot u'(x)$$

формуламен анықталады (күрделі функцияны дифференциалдау ережесі).

Мысалы, $y = \sin x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = 2x\cos x^2$. ▲

$y = \left(x + \frac{2}{x}\right)^{100}$, онда $y' = 100\left(x + \frac{2}{x}\right)^{99} \cdot \left(x + \frac{2}{x}\right)' = 100\left(x + \frac{2}{x}\right)^{99} \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$. ▲

$y = \ln^3(x+3)$, онда $y' = 3 \cdot \ln^2(x+3) \cdot (\ln(x+3))' = \frac{3\ln^2(x+3)}{x+3}$. ▲

8) Егер $y = f(x)$ функциясының x нүктесінде туындысы $y' = f'(x) \neq 0$ болса, онда оған кері $x = \varphi(y)$ функциясының туындысы бар болады және ол $x'_y = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ тең болады.

Негізгі функциялардың туындылары

1	$c' = 0$	6	$(\sin x)' = \cos x$	11	$(e^x)' = e^x$
2	$x' = 1$	7	$(\cos x)' = -\sin x$	12	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ell n a}$
3	$(x^n)' = n x^{n-1}$	8	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	13	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
4	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	9	$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	14	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	10	$(a^x)' = a^x \ell n a$	15	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16	$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	18	$(sh\, x)' = ch\, x$	20	$(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$
17	$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	19	$(ch\, x)' = sh\, x$	21	$(cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

Көрсеткіштік-дәрежелік $F(x) = [U(x)]^{V(x)},\ U(x) > 0$ функциясының туындысын табу үшін берілген функцияның екі жағын да логарифмдеп, сосын оны дифференциалдаймыз:

$$\ln F(x) = V(x) \cdot \ln U(x) \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = V'(x) \cdot \ln U(x) + V(x) \cdot \frac{U'(x)}{U(x)}.$$

Сонда

$$\left([U(x)]^{V(x)}\right)' = [U(x)]^{V(x)} \cdot \left[V'(x) \cdot \ln U(x) + V(x) \cdot \frac{U'(x)}{U(x)}\right].$$

228. Туындының анықтамасы бойынша (дифференциалдау формулаларын қолданбай) $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі: x аргументке Δx өсімшесін берейік, сонда y функция Δy өсімшесін алады:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Функция өсімшесін табайық:

$$\Delta y = [2\cdot(x+\Delta x)^3 + 5\cdot(x+\Delta x)^2 - 7\cdot(x+\Delta x) - 4] - (2x^3 + 5x^2 - 7x - 4) =$$
$$= 6x^2\cdot\Delta x + 6x\cdot(\Delta x)^2 + 2\cdot(\Delta x)^3 + 10x\cdot\Delta x + 5\cdot(\Delta x)^2 - 7\cdot\Delta x.$$

Функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын табайық:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\cdot\Delta x + 2\cdot(\Delta x)^2 + 10x + 5\cdot\Delta x - 7.$$

Бұл қатынастың $\Delta x \to 0$-дағы шегін табайық:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(6x^2 + 6x\cdot\Delta x + 2\cdot(\Delta x)^2 + 10x + 5\cdot\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

Ендеше, туынды анықтамасы бойынша $y' = 6x^2 + 10x - 7.$ ▲

229. Туындының анықтамасы бойынша $y=\sqrt{x}$ функциясының туындысын табу керек.

Шешуі: Функция өсімшесін табайық.: $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}.$

Бұдан $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$ және

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Сонымен, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$ ▲